

Undervisning genom problemlösning

Hanna Palmér, Högskolan Dalarna & Linnéuniversitetet; Helena Grundén, Högskolan Dalarna

I klassrummet kan problemlösning organiseras på olika sätt där elever kan arbeta enskilt eller i olika gruppkonstellationer. Oavsett hur problemlösning organiseras påverkar lärarens agerande elevernas möjlighet att upptäcka och lära såväl avsett matematikinnehåll som strategier för problemlösning. Denna text har fokus på läraren, hur läraren kan planera inför och agera vid undervisningstillfällen som inkluderar problemlösning. Som utgångspunkt kommer de fem faserna **förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop** användas.

Förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop

Problemlösning kan tidsmässigt delas in enligt **inför**, **under** och **efter** problemlösning.

- **Inför** problemlösning väljer läraren ut en problemuppgift som kan syfta till att synliggöra matematiska idéer och/eller strategier för problemlösning.
- **Under** problemlösning arbetar eleverna med problemuppgiften vilket kan göras enskilt eller i olika gruppkonstellationer.
- **Efter** problemlösning samlar läraren eleverna i helklass i syfte synliggöra, diskutera och sammanfatta såväl matematikinnehåll som strategier.

Som stöd i planering av problemlösning kan de fem faserna **förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop** användas (Smith et al., 2009; Stein et al., 2008). Syftet med faserna är att stötta läraren i planering och genomförande av undervisningstillfällen som inkluderar problemlösning. Nedan beskrivs dessa faser mer detaljerat i relation till **inför**, **under** och **efter** problemlösning.

Lärarens roll inför problemlösning

Planering av problemlösning inleds med att identifiera *målen* med problemlösningen. Utifrån målen väljs eller konstrueras en lämplig problemuppgift.

- Vilket matematikinnehåll/vilka matematiska förmågor ska eleverna ges möjlighet att utforska genom problemuppgiften?
 - Vilka strategier ska eleverna ges möjlighet att utforska genom problemuppgiften?
- Därefter planeras hur arbetet i elevgruppen ska organiseras.

Förutom att utgå ifrån målen med problemlösningen behöver valet av problemuppgift även utgå ifrån elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper.

- Vilka tidigare erfarenheter har eleverna av matematikinnehållet/förmågorna?
- Vilka problemuppgifter har eleverna arbetat med tidigare?
- Vilka tidigare erfarenheter har eleverna av möjliga lösningsstrategier?

Läraren behöver också vara medveten om hur det avsedda syftet med en uppgift kan förändras. Stein och Smith (1998) beskriver denna förändring som tre steg. Första steget är uppgiften så som den presenteras i ett material, till exempel i ett läromedel eller i en uppgiftsbank. I nästa steg presenterar läraren uppgiften i klassrummet och slutligen tolkar och löser eleverna uppgiften. Enligt Stein och Smith förändras ofta syftet med en uppgift från hur den presenteras i ett material genom hur den presenteras av läraren i klassrummet och genom hur eleverna därefter gör egna tolkningar utifrån lärarens presentation. Lärarens presentation av uppgiften framhålls dock som särskilt viktig för hur eleverna tolkar den och för vad de därmed ges möjligt att lära.

Studier har visat att det många gånger är stor skillnad mellan potentialen i en problemuppgift och det lärande som möjliggörs för eleverna i arbetet med uppgiften i klassrummet. Detta kan bero på att läraren förenklar problemuppgiften i samband med introduktionen och/eller att läraren lotsar eleverna under lösningsprocessen (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Lotsning innebär att läraren genom att ställa korta frågor successivt leder eleven fram till lösningen utan att eleven egentligen har förstått vare sig matematikinnehållet eller lösningen. När lärare lotsar ges eleven inte möjlighet att reflektera över vare sig strategier eller matematikinnehåll. Skillnaden mellan potentialen i en problemuppgift och det lärande som möjliggörs för eleverna i arbetet med uppgiften i klassrummet kan också bero på hur problemlösning organiseras där faserna **förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop** utgör ett stöd för läraren (Stein & Smith, 1998).

Att **förutse** innebär att på förhand reflektera över:

- hur eleverna kan komma att tolka och lösa uppgiften
- vilka frågor eleverna kan komma att ställa
- vilka såväl felaktiga som korrekta strategier eleverna kan komma att pröva
- hur läraren på bästa sätt kan bemöta frågor från eleverna för att eleverna ska ges möjlighet att målet med problemuppgiften.

En sådan reflektion tar tid då läraren behöver förbereda för flera olika scenarier. Trots att problemuppgifter kan lösas på olika sätt och att lärare därmed inte kan kontrollera hur undervisningstillfällena som inkluderar problemlösning kommer att utspela sig, kan

läraren i förväg förbereda för de matematiska diskussioner som kan komma att föras. En sådan planering inkluderar att förutsäga möjliga elevlösningar och möjliga frågor från eleverna. Planeringen inkluderar också att förbereda möjliga svar på frågorna samt att planera den avslutande helklassdiskussionen.

Ytterligare en del av att **förutse** är att planera för hur undervisningen ska göras tillgänglig för alla elever vilket inkluderar att:

- välja en uppgift som alla elever kan arbeta med men som samtidigt är en problemuppgift
- planera för hur problemuppgiften ska presenteras för att alla elever ska förstå den
- bestämma hur arbetet ska organiseras för att alla elever ska ges goda möjligheter att lära.

Såväl matematikinnehållet i problemuppgifter som möjliga strategier för problemlösning kan behöva anpassas till olika elevers förkunskaper där problemuppgifter kan behöva förenklas eller fördjupas. Förenklingar ska dock inte innebära att uppgiften slutar vara en problemuppgift för eleverna. Ett möjlig förberedelse för läraren är att själv lösa problemuppgiften på så många olika sätt som möjligt. Genom att utgå från de elever som finns i klassrummet kan problemuppgifter väljas och formuleras så att de bidrar till elevernas engagemang genom att vara relevanta och värdefulla i relation till eleverna. För att problemuppgifterna ska vara relevanta för alla elever behöver hänsyn tas till etniska, kulturella och sociala aspekter i elevgruppen och uppgiften behöver anpassas till den åldersgrupp undervisningen riktar sig till (CAST, 2018).

Därutöver följer att planera hur problemuppgiften ska introduceras och hur arbetet med problemuppgiften ska organiseras. Oavsett hur en uppgift introduceras är det viktigt att fokus är på elevernas förståelse av uppgiften och inte på hur uppgiften ska lösas. Genom att presentera uppgiften på flera olika sätt och förtydliga viktiga aspekter av innehållet kan undervisningen bli tillgänglig för alla elever (CAST, 2018). För några elever kan en muntlig introduktion av uppgiften underlätta medan andra föredrar att läsa och därmed behöver instruktionerna skriftligt. Vissa uppgifter lämpar sig väl att introducera med hjälp av laborativt material eller genom att elever får representera de personer som uppgiften handlar om. Genom att erbjuda en kort inspelad introduktion kan den elev som behöver lyssna och titta på presentationen av uppgiften flera gånger. För de elever som har annat modersmål än svenska kan en skriftlig eller inspelad muntlig instruktion på modersmålet vara till hjälp.

Inför problemlösning kan läraren också reflektera över i vilken utsträckning de sociomatematiska normerna (Yackel & Cobb, 1996) i klassen stödjer arbetet med problemlösning.

- Hur har arbetet organiserats tidigare, har eleverna arbetat enskilt, i par och/eller i grupp?
- Hur har helklassdiskussionerna fungerat tidigare, har alla elever kommit till tals?

Att alla elever ska komma till tals innebär inte att alla elever ska komma till tals vid samtliga tillfällen utan att alla elever ska komma till tals vid problemlösning över tid. För yngre elever som kanske inte har stor erfarenhet av att arbeta med problemlösning i grupp kan läraren även behöva planera en introduktion av hur samarbetet i grupp ska organiseras. Det är dock inte så att elever först behöver träna på att samarbeta i grupp för att sedan kunna lösa problemuppgifter tillsammans utan problemlösning kan vara ett medel för att träna samarbete.

Lärares roll *under* problemlösning

När eleverna arbetar med problemuppgiften **överblickar** läraren elevernas arbete där den information som samlas in senare används i den avslutande helklassdiskussionen. I denna fas är den förberedelse läraren gjorde under **förutse** ett stort stöd. Om elever kör fast kan läraren ställa frågor som får eleverna tillbaka i riktning mot det önskade målet och om elever behöver ytterligare utmaning kan fördjupande frågor ställas, till exempel om det finns fler möjliga lösningar på uppgiften. Läraren kan påminna eleverna om strategier som använts vid tidigare problemlösning och uppmuntra eleverna att prova någon eller några av dessa. Läraren kan också hjälpa eleverna att strukturera sin lösning genom att be dem berätta vad de har provat hittills, vad de känner att de förstår, vad nästa steg är i deras lösning och så vidare. Det är dock viktigt att de frågor som ställs inte omvandlar problemuppgiften till en rutinuppgift. Genom att ställa frågor till eleverna kan läraren också erfara hur eleverna förstår matematikinnehållet. Det läraren hör och ser när den överblickar är sådant som kan utgöra utgångspunkt för den avslutande helklassdiskussionen.

- Vilka matematiska idéer diskuteras?
- Förekommer några missuppfattningar?

I problemlösning är inte elevernas arbete klart så snart de har en lösning på problemuppgiften utan en viktig del av problemlösning är också att reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Läraren kan uppmuntra eleverna att titta tillbaka på lösningsprocessen, värdera lösningen och dess rimlighet samt låta eleverna utforska om de kan lösa problemuppgiften på fler sätt. Genom att inledningsvis låta alla elever reflektera över samma frågeställning och genom att variera dessa frågeställningar, kan eleverna successivt skolas in i ett reflekterande arbetssätt, till exempel:

- Kan uppgiften ha fler än en lösning? Vilka?
- Kan vi lösa uppgiften på mer än ett sätt? Hur? På vilka sätt?
- Vilken av våra lösningar är mest effektiv? Varför?
- Är lösningen rimlig? (Vad betyder rimlig?) Förklara!

När läraren överblickar väljer läraren också ut vilka olika lösningar som ska tas upp i den avslutande gemensamma helklassdiskussionen. Ju bättre läraren har förutsett hur eleverna kan komma att arbeta med problemuppgiften desto enklare är det för läraren att skapa överblick över elevernas olika lösningar. Lösningar **väljs ut** i relation till vad läraren vill synliggöra i den avslutande diskussionen och utgår därmed från målen med problemuppgiften.

- Vilka matematiska idéer och vilka strategier kan olika elevlösningar visa?
- Vilka vanliga missuppfattningar kan olika elevlösningar visa?

Lärarens roll efter problemlösning

Slutligen samlar läraren eleverna i en gemensam diskussion med fokus på problemlösningens mål. Om en problemuppgift har tagit lång tid att lösa kan det vara en god idé att vänta med denna diskussion tills ett annat undervisningstillfälle i nära anslutning då diskussionen är en viktig del av problemlösningssprocessen som inte ska hastas över.

Utifrån ett medvetet val väljer läraren några elevlösningar som utgångspunkt för den gemensamma helklassdiskussionen där läraren **ordnar** dessa lösningar i en lämplig följd. Enligt Stein et al. (2008) finns en risk att den avslutande diskussionen blir en presentation av olika elevers lösningar och strategier snarare än en diskussion kring matematikinnehåll och möjligheten med olika strategier. I situationer där alla elevers lösningar visas hamnar fokus ofta på ”hur eleven gjorde” snarare än på matematikinnehållet och möjligheten att lösa problemuppgiften med den visade strategin.

Syftet med att ordna lösningarna i en lämplig följd är att kunna synliggöra samband mellan lösningarna. Istället för att presentera olika lösningar en och en, jämförs de olika lösningarna och läraren hjälper eleverna dra slutsatser och se samband mellan matematikinnehåll, strategier och representationer. Snarare än att helklassredovisningen består av separata presentationer av olika sätt att lösa en problemuppgift är målet att synliggöra matematiska idéer och strategier genom att koppla samman elevernas lösningar. Inför helklassdiskussionen kan läraren även förbereda ytterligare lösningsförslag i syfte att synliggöra matematikinnehåll, strategier eller representationer som inte kommer fram i elevernas egna lösningar.

I den avslutande helklassdiskussionen är elevers olika lösningar en tillgång. Att synliggöra olika strategier i helklass handlar inte om att visa olika lösningar utan om att diskutera, jämföra och kanske även om att förfina lösningarna. Ett sätt att ordna lösningar är att börja med en lösning som flera av eleverna har använt för att många ska känna igen sig för att därefter fokusera strategier som enbart få eller en elev använt. Ett annat sätt att ordna lösningar är att utgå ifrån olika representationer som eleverna använt, till exempel att inleda med lösningar med bilder och därefter symboliska lösningar (Stein et al., 2008). På det sättet visar läraren också att de olika sätten att representera kunskap värderas som värdefulla. Genom den ordning som läraren presenterar lösningarna kan likheter och skillnader mellan lösningarna synliggöras och matematikinnehållet och olika strategier förtydligas.

När elever presenterar sina lösningar på problemuppgifter muntligt skapas förutsättningar för att de får föra och följa matematiska resonemang. De ges också möjlighet att utveckla sitt matematiska språk. När de lyssnar på varandras lösningar kan de få ny kunskap och förståelse för både matematikinnehåll och strategier. Det är även möjligt att diskutera missuppfattningar som läraren upptäckt samt att utvidga problemuppgiftens innehåll eller kontext genom att koppla till tidigare problemuppgifter eleverna arbetat med. Slutligen kan läraren belysa och summera de viktigaste delarna av den specifika problemuppgiften i syfte att samla eleverna kring och tydliggöra målet med problemuppgiften (Stein et al., 2008).

Sammanfattning

Oavsett hur problemlösning organiseras påverkar lärarens ageranden elevernas möjlighet att upptäcka och lära såväl avsett matematikinnehåll som strategier för problemlösning. Syftet med presentationen av faserna **förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop** ovan har inte varit att ge en instrumentell bild av undervisning genom problemlösning utan att erbjuda lärare vägledning för såväl planering inför som agerande under och efter problemlösning i syfte att främja såväl elevernas individuella som kollektiva lärande.

Referenser

CAST (2018). *Universal design for learning guidelines version 2.2*.
<http://udlguidelines.cast.org>

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*.
Tarquin.

Smith, M. S., Hughes, E. K., & Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 548–556.
<https://www.jstor.org/stable/41182933>

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
<https://doi.org/10.1080/10986060802229675>

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
<https://www.jstor.org/stable/41180401>

Yackel, T., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.
<https://www.jstor.org/stable/749877>