Rimma Nyman, Anna Ida Säfström & Eva Taflin

Rika lösningar på rika problem

– *att dela smörgåsar*

I tre artiklar med början i denna vill vi ta upp erfarenheter från att ha arbetat med rika matematiska problem. Först ut är vår beskrivning av hur vi engagerade lärare, lärarstudenter och deras elever i problemet *Att dela smörgåsar*.

Ett rikt problem för årskurs 4–6

Att dela smörgåsar
Ada, Bill och Caj ska på utflykt. Ada har två smörgåsar. Bill har tre smörgåsar och Caj har 25 kronor. De ska dela på smörgåsarna så att alla får exakt lika mycket. Caj ska betala till var och en för det hon får så att betalningen blir rättvis.

Hur mycket ska Caj betala till Bill respektive Ada?

Problemet är ett rikt matematiskt problem som väcker intresse och engagemang, öppnar upp för diskussioner och utvecklar matematiska kompetenser. Vi har arbetat med problemet med verksamma och blivande lärare i årskurs 4–6, som i sin tur har fått arbeta med problemet tillsammans med sina elever. Vi har samlat in lösningar från skolor och lärosäten i tre olika regioner och sammanställt några representativa lösningar.

Vad gör det här problemet rikt?

Ett rikt problem kännetecknas framförallt av att det är rikt på matematikinnehåll. Utöver problemlösning möjliggör problemet arbete med

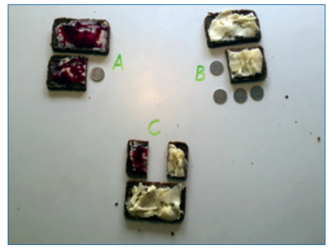
- representationsmodeller av bråk
- olika aspekter av bråk – del av det hela, del av ett antal, bråk som division och bråk som förhållande
- proportionalitet
- procent och decimalform.

Ett problem – fyra uttrycksformer

KLAG-modellen är en överskådlig modell för att dela in olika uttrycksformer. Med hjälp av modellen redogör vi för representativa lösningar som vi har fått.

Konkret uttrycksform (K)

Vissa studenter valde konkret material i form av riktiga smörgåsar och pengar, eller så tillverkade de egna, som fördelades i en konkret situation.



Logisk/språklig uttrycksform (L)

En annan vanligt förekommande lösning var att språkligt förklara hur smörgåsarna och pengarna fördelades, utan beräkningar eller konkret material.

De har fem smörgåsar tillsammans som de ska dela lika. De får 1,5 smörgåsar var. Den sista halvan tar de en tredjedel var av.

Algebraisk/aritmetisk uttrycksform (A)

Det har förekommit aritmetiska lösningar, främst bland lärare och lärarstudenter, men också från elever i årskurs 6 som har arbetat mycket med bråk.

I denna lösning används aritmetikens symbolspråk, men vi har även sett exempel på att beteckningar för personerna har införts, vilket skulle vara ett steg mot algebra. Lösningen har en tydlig struktur och uträkningarna görs i bråkform. Först redovisas förutsättningarna och sedan illustreras omfördelningen mellan de olika personerna med hjälp av pilar. Eftersom Caj ska köpa fem femtondelar för 25 kronor, betyder det att varje femtondel är värd fem kronor.

Ada: 2 smörgåsar $= \frac{6}{15}$
Bill: 3 smörgåsar $= \frac{9}{15}$
Caj: 25 kr

$2+3=5$ smörgåsar $\quad \frac{5}{3}$ smörgåsar var

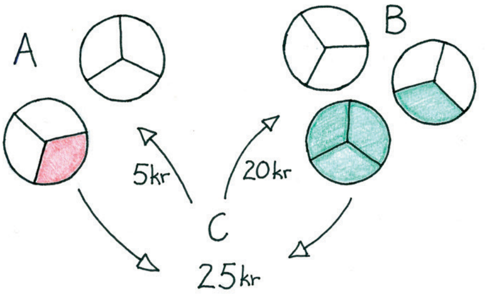
Ada $\rightarrow$ Caj : $\frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$

Bill $\rightarrow$ Caj : $\frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$

Caj : $\frac{5}{15} = 25$ kr
$\frac{1}{15} = 5$ kr

Caj $\rightarrow$ Ada : 1·5 kr
Caj $\rightarrow$ Bill : 4·5 kr

Grafisk uttrycksform (G)

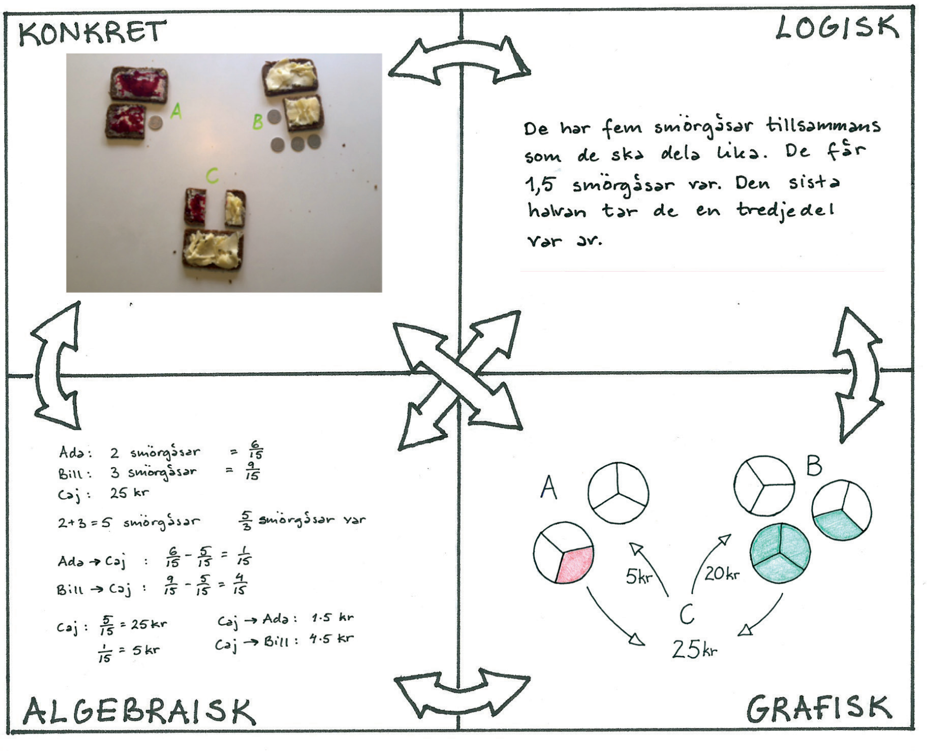


I de flesta lösningsförslagen som vi har sett fanns grafiska inslag representerade, som i illustrationen till höger.

Att zappa mellan uttrycksformer

Studenternas lösningar visar att problemet ger rika möjligheter att använda olika representationsformer. I majoriteten av lösningsförslagen fanns flera uttrycksformer representerade och att växla mellan dem var vanligt, speciellt mellan de logisk/språkliga, grafiska och algebraiska. Att gå från en konkret uttrycksformen till en algebraisk/aritmetisk var också vanligt, som i bilden här till höger.

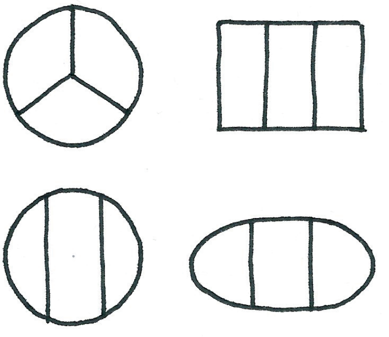
Både blivande och verksamma lärare påpekade att vi i vår lärarroll fångar upp elevernas sätt att tänka och hjälper dem att komma vidare i sina resonemang. I smörgåsproblemet, liksom i många andra problem, är övergången från det konkreta till andra uttrycksformer ett viktigt steg i utvecklingen av matematiska kompetenser. Bilden nedan visar ett exempel på hur man kan sammanställa lösningar med hjälp av KLAG-modellen.



Problem med problemet

Det finns en del att tänka på vid arbete med smörgåsproblemet. Det är viktigt att diskutera hur var och en uppfattar problemet. Vad innebär det att dela rättvist? Exempelvis har rättvis betalning tolkats av vissa som att alla ska få en tredjedel av pengarna. Flera frågade också om Caj ska göra sig av med alla sina pengar.

Går det att dela *exakt* lika? Våra studenter frågade sig hur man kan dela en smörgås i exakt lika stora delar. Tredjedelarna illustrerades på olika sätt, men alla modeller är inte lika lämpliga för att illustrera indelning i tre lika stora delar. I de två översta modellerna är bitarna lika stor, vilket uppenbart inte är fallet för den nedre till vänster. Den nedre till höger är mest lik en riktig smörgås, men det är svåra att avgöra bitarnas storlek med blotta ögat.



Smörgåsproblemet ger alltså upphov till diskussioner om hur situationen ska tolkas och det väcker intresse och engagemang i elevgrupper. Många gjorde antagandet att en smörgås är värd fem kronor, vilket är en naturlig följd av det vi ser och av ett-till-ett–principen, dvs en femma per smörgås. Det är viktigt att låta de som arbetar med problemet göra tydliga antaganden, ställa följdfrågor som kopplar tillbaka till problemformuleringen och lyfta proportionalitetsbegreppet. En möjlig följdfråga skulle kunna handla om vilka antaganden som faktiskt följer av problemformuleringen. Finns det antaganden som inte stämmer överens med hur problemet är formulerat? Finns det antaganden som är mer lämpliga än andra, och i så fall varför? Dessa och liknande frågor kan öppna upp för en diskussion om hur verkliga problem kan lösas med hjälp av matematiska modeller.

LITTERATUR

Hedrén, R., Taflin, E. & Hagland, K. (2005). *Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till?* Nämnaren 2005:1.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber. Skolverket.

Nyman, R. (2016). What makes a task interesting? *Educational Research and Reviews*. 11 (16), s 1509–1520.

Säfström, A. I. (2013). *Exercising mathematical competence: practising representation theory and representing mathematical practice*. Doctoral thesis. Göteborgs universitet.