Rimma Nyman, Anna Ida Säfström & Eva Taflin

Rika lösningar på rika problem

– *att välja glasskulor*

I en serie av tre artiklar tar vi upp erfarenheter från arbete med rika matematiska problem. I den förra artikeln presenterade vi problemet *Att dela smörgåsar.* I denna andra del har vi valt en enkel variant av ett klassiskt kombinatorikproblem i en elevnära kontext. Vi har samlat in lösningar från elever i årskurs 2–3 och synliggör olika uttrycksformer.

Ett rikt problem för åk F–3

Att välja glass
Kim ska köpa lösglass i kulor. Hen kan välja mellan fyra olika smaker och vill gärna ha två glasskulor. På hur många sätt kan Kim välja sin glass?

Problemet handlar om kombinatorik och konkretiseras enkelt tillsammans med yngre elever. Det engagerar, väcker elevernas intresse och öppnar upp för diskussioner som utvecklar matematiska kompetenser.

Vad gör det här problemet rikt?

Problemet är lätt att förstå och inbjuder till arbete med konkret material. Alla ges möjlighet att arbeta med det, men framförallt är problemet rikt på matematiskt innehåll. Problemet introducerar och initierar diskussioner kring

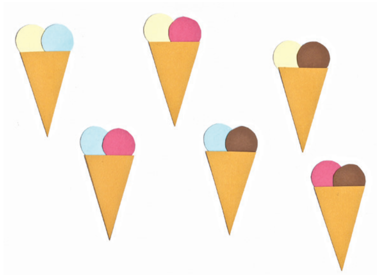
- enkla tabeller och hur de kan användas för att skapa struktur
- ordningens roll i kombinatoriska problem
- talmönster och generaliseringar.

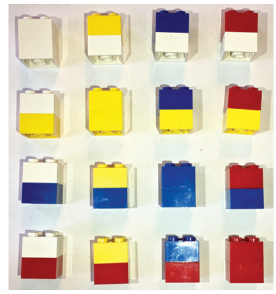
Ett problem – fyra uttrycksformer

KLAG-modellen gör det överskådligt att dela in elevers lösningar i olika uttrycksformer. Med hjälp av modellen redogör vi för representativa lösningar som vi har sett.

Konkret (K)

Många elever provade sig fram med konkret material i form av olikfärgade papperscirklar och plockisar som exempelvis legobitar.





Logisk/språklig (L)

En del elever resonerade sig fram till svaret muntligt eller skriftligt, t ex:

Man har fyra smaker. Man kan
ta två av samma: det blir fyra.
Man kan ta olika: första smaken
jordgubbe går ihop med de andra
tre. Andra smaken choklad med
två. Sedan den tredje med den
fjärde kvar bara. 6 sätt!

Algebraiskt (A)

Vissa elever representerade smaker med hjälp av bokstavskombinationer, där en bokstav representerar en smak (j = jordgubb, b = blåbär och så vidare).

AB AC AJ BC BJ JC

Det fanns också elever som började generalisera:

Om man tar fyra smaker blir det

$3 + 2 + 1 = 6$

Om man tar fem blir det

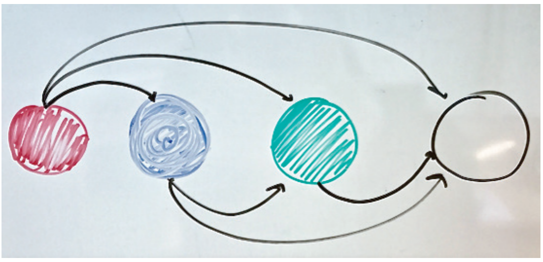
$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

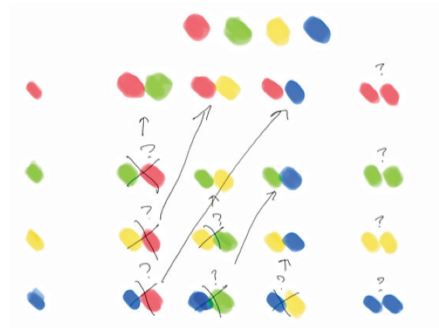
Om man tar sex blir det

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

Grafisk (G)

Några elever ritade kombinationerna med hjälp av fyra olika färgpennor på eget papper och drog streck mellan möjliga kombinationer. Sedan räknade de samman antalet streck.

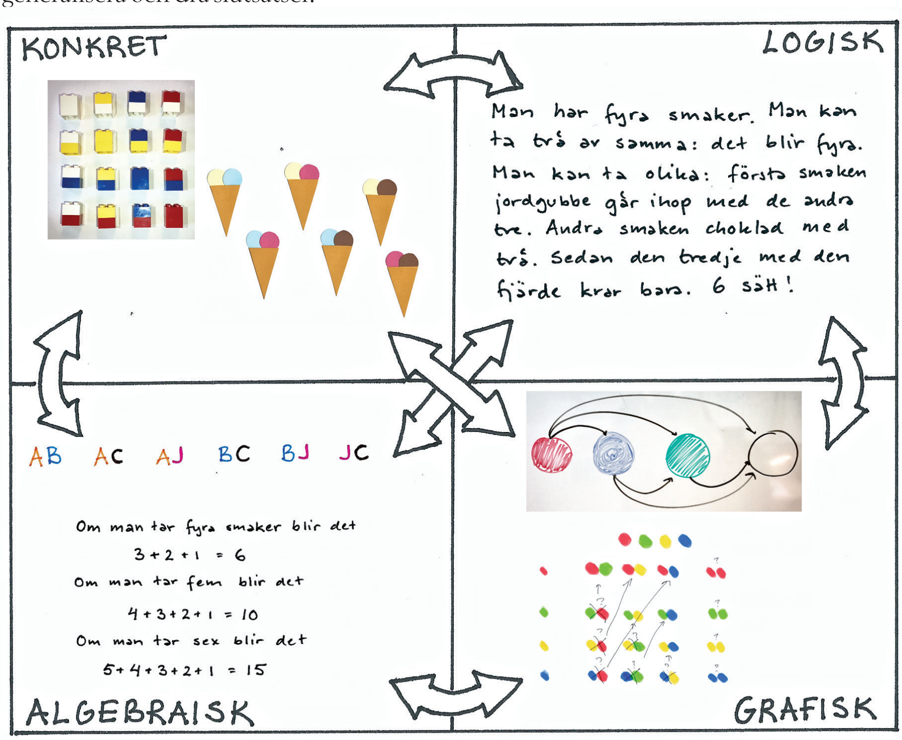




Ett annat exempel på grafisk uttrycksform var en sammanställning i tabellform. Här blev det också tydligt hur problemet öppnade upp för diskussioner redan från start. *Får man välja två av samma smak? Spelar ordning någon roll?* Det är bra om elever tidigt får möta problem där svaret beror på premisserna.

Att zappa mellan olika uttrycksformer

Det är viktigt att zappa mellan olika uttrycksformer. Elever kan resonera kring kombinationer av papperskulor och skriva ner sina resultat i en tabell. Lärare märker snabbt att konkreta och grafiska uttrycksformer inte lämpar sig vid tre kulor men fungerar med fler smaker. Det är också tydligt att resonemang med hjälp av språket är till stor hjälp för de yngre eleverna när de ska börja generalisera och dra slutsatser.



Elevens algebraiska representation ovan är i linje med vad man kan förvänta sig av elever i den åldersgruppen. Det är fördelaktigt att uppmärksamma hur den här typen av elevresonemang formulerar en generell regel och i det här fallet närmar sig rekursionsformeln: $S_{n+1} = S_n + n$. Även om man inte tar upp formeln är det viktigt att ställa stödfrågor, att så ett frö som senare kan leda till generaliseringar.

Problem med problemet

I uppgiften framgår det inte om det är tillåtet att välja samma smak och det finns en risk att eleverna hamnar i diskussion om hur problemet ska tolkas. Det kan vara svårt att acceptera att ett problem har olika lösningar om man inte är van att arbeta på det sättet, men diskussioner om vilka villkor som gäller är kärnan i kombinatorik. Att diskussionen hamnar där är bra och ska uppmuntras.

Det finns många sätt att göra problemet mer utmanande, sätt som eleverna själva kan komma på. Det kan vara svårt för lärare att följa upp dessa sätt om de inte i förväg har tänkt på hur de ska uttrycka ordningens betydelse för eleverna. Det går att börja med få smaker och bygga upp förståelsen genom att testa allt fler kombinationer, för att sedan kunna generalisera.

Att klippa ut strutar och glasskulor kan engagera men också ta långt tid och förflytta fokus från det matematiska resonemanget. Det är viktigt att fundera på om det konkreta materialet bör förberedas i förväg.

Även om det finns vissa problem att ta ställning till, är det med hjälp av den här typen av problem som elever ges chansen att tolka verkliga situationer matematiskt och bli engagerade i matematik.

LITTERATUR

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem, inspiration till variation*. Malmö: Elanders Berglings förlag AB.

Hedrén, R., Taflin, E., & Hagland, K. (2005). *Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till?* Nämnaren 2005:1.

Nyman, R. (2017). *Interest and engagement: Perspectives on mathematics in the classroom*. Dokotrsavhandling, Göteborgs universitet.

Nyman, R., Säfström, A. I. & Taflin, E. (2016). *Rika lösningar på rika problem – att dela smörgåsar.* Nämnaren 2016:3.