

Likhetstecknets innebörd

Följande av Görel Sterner (2012) översatta och bearbetade text bygger på boken: Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann

Originalartikel från modul, Taluppfattning och tals användning, åk 1-3.

Elever i åk 1 – 6 fick följande uppgift:

$$8 + 4 = \square + 5$$

Två vanliga svar var 12 och 17. Mindre än 10 % i någon årskurs gav det korrekta svaret 7 och resultaten i åk 6 var till och med något sämre än i övriga årskurser. Detta tyder på att många elever bär på allvarliga missuppfattningar om likhetstecknets innebörd. De saknar ofta en djupare förståelse för att likhetstecknet betecknar relationen mellan två ekvationer, eller mellan två tal. En vanlig tolkning är att likhetstecknet är en uppmaning att utföra en beräkning, ungefär som miniräknaren gör när vi trycker på symbolen för likhetstecknet. Denna missuppfattning begränsar elevernas möjligheter att lära sig basala aritmetiska idéer med förståelse, deras förmåga att representera och använda dessa idéer och skapar problem i mötet med algebra.

Missuppfattningar – några elevexempel

$$8 + 4 = \square + 5$$

Elev A:

- Det är 12.
- Hur vet du att det är 12?
- För att det är svaret. Jag räknade 8, 9, 10, 11, 12.
- Vad tänker du om 5:an som står där?
- Den är bara där. Den har ingenting att göra med 8 och 4. Den betyder ingenting. De kanske bara har tagit med den för att förvirra. Ibland sätter vår lärare in extra tal när vi löser problem för att vi ska tänka på vad vi ska addera och subtrahera.

Elev B:

- Det är 17.
- Hur kom du fram till det?
- Därför att jag vet att $8 + 4$ är 12 och 5 till är 17.
- Varför adderade du de talen?
- För att plustecknet betyder att man ska addera.
- Men $8 + 4$ står på ena sidan av likhetstecknet och 5 på den andra sidan?
- Ja, men man måste addera alla tal. Det är det som det betyder.

Elev C:

- Skriver 12 i den tomma rutan och skriver sedan 17 efter 5:an ($8 + 4 = 12 + 5 = 17$).
- Berätta hur du gjorde.
- Jag lade ihop $8 + 4$ som är 12 och sedan måste jag lägga till 5 och då blev det 17.
- Är $8 + 4$ lika med $12 + 5$?
- $8 + 4$ är 12 och man lägger till 5 för att få 17.

Elevernas metoder för att skapa mening och förståelse för uppgiften och dess lösning var inte slumpmässiga. De försökte dra nytta av de erfarenheter de hade av att lösa additions- och subtraktionsuppgifter. I de flesta uppgifter som eleverna hade löst tidigare, kom svaret alltid direkt efter likhetstecknet. De generaliserade utifrån dessa erfarenheter och uppfattade att en ”regel” för att lösa den här typen av uppgifter var att svaret kommer direkt efter likhetstecknet. Samtliga elever i exemplen ovan tolkade likhetstecknet som en uppmaning att utföra en operation och att svaret skulle skrivas till höger om likhetstecknet. Elev C gav uttryck för en uppfattning som innebar att likhetstecknet egentligen var irrelevant i sammanhanget.

Likhetstecknet representerar en relation mellan två tal – några elevexempel

$$8 + 4 = \square + 5$$

Elev D (efter viss tvekan):

- Det är 7.
- Hur vet du det?
- $8 + 4$ är 12. Då måste jag tänka ut vad som ska adderas till 5 för att få 12. Jag räknade ut att det är 7.
- Varför räknade du ut vad som ska adderas till 5 för att få 12?
- För att jag hade 12 på den här sidan (pekar till vänster om likhetstecknet) och då måste jag ha 12 på den andra sidan också.
- Några elever har sagt att det ska stå 12 i den tomma rutan. Hur ser du på det?
- Det är fel. Tolv och 5, det skulle bli 17 och det är inte lika med 12. Båda sidor måste vara lika.

Elev E (svarar snabbt):

- Det är 7.
- Hur vet du det?
- Jag såg att 5 var ett mer än 4 så talet i den tomma rutan måste vara ett mindre än 8. Så det är 7.
- Intressant. Vi prövar en annan uppgift. $57 + 86 = \square + 84$
- Det är lätt. Femtionio.
- Det var snabbt!
- Ja, det är precis som den förra uppgiften. Det är två mer eftersom 84 är två färre.

Båda eleverna uppfattade likhetstecknet som uttryck för en relation mellan tal. Elev D räknade ut summan på ekvationens vänstra sida och fann det tal som adderat till 5 skulle ge detta tal. Elev E sökte efter relationer, både mellan ekvationens två sidor och mellan de ingående talen, vilket gjorde det onödigt att utföra någon beräkning. Förmåga att reflektera över relationer mellan matematiska uttryck som i exemplet med E, är kritisk för elevers möjligheter att tänka mer generellt kring aritmetik och för att utvidga sitt aritmetiska kunnande till algebra.

Utveckling av elevers föreställningar om likhetstecknet

Ett fruktbart sätt att hjälpa elever att utveckla förståelse för likhetstecknets innebörd och användning är att utmana deras befintliga uppfattningar. Det kan vi göra genom att engagera eleverna i diskussioner om lösningar på problem och uppgifter där olika uppfattningar om likhetstecknet uppstår. I dessa diskussioner kan vi uppmuntra och stödja eleverna att tydligt formulera sina uppfattningar om likhetstecknet innebörd och hur det kan användas, så att de själva och kamraterna kan förstå de olika perspektiv som finns representerade i klassen. För att elever ska utveckla djupare förståelse för hur vi använder likhetstecknet, är det nödvändigt att de blir medvetna om vilka uppfattningar som förekommer och vilket stöd som finns för dessa uppfattningar.

Ett syfte med diskussionerna är alltså att synliggöra elevernas uppfattningar om innebörden av likhetstecknet men utgör samtidigt ett viktigt steg i att utveckla sätt att tänka och samtala som stödjer principerna för algebraiska resonemang. När vi uppmuntrar elever att lösa uppgifter och att diskutera alternativa föreställningar och användning av likhetstecknet, försätter vi eleverna i en situation där de behöver formulera matematiska principer som ofta lämnas implicita. De måste motivera de principer som de själva föreslår på ett sätt som övertygar andra, och de måste upptäcka och lösa motstridiga antaganden och slutsatser.

Att välja uppgift

I vår strävan att engagera eleverna i diskussioner och att utmana deras uppfattningar är valet av specifika uppgifter av kritisk betydelse. Lämpligt valda uppgifter kan vara en utgångspunkt för att:

- uppmuntra eleverna att formulera sina idéer i ord
- utmana elevernas uppfattningar genom att variera uppgifterna så att de tvingas att undersöka och pröva om deras uppfattningar håller
- synliggöra elevernas tänkande

Sanna och falska utsagor

Vid introduktion av sanna och falska utsagor är det ofta enklast att ge ett exempel och låta eleverna avgöra om påståendet är sant eller inte sant, det vill säga falskt. Det kan vara en bra idé att börja med ett påstående som innebär relativt enkla beräkningar med en enda siffra till höger om likhetstecknet, men det är inte alltid nödvändigt. Ofta uppfattar eleverna snabbt de kritiska aspekterna i samband med klassrumsdiskussioner om sanna och falska utsagor:

- Läraren: Är detta påstående sant eller falskt: $8 - 5 = 3$?
- Elev: Det är sant.
- Läraren: Hur vet vi att det är sant?
- Elev: Eftersom 8 minus 5 är 3. Om jag t ex har 8 karameller och äter upp 5 så har jag 3 karameller kvar.
- Läraren: Är detta påstående sant eller falskt: $3 \times 4 = 15$?
- Elev: Det är falskt. 3×4 är 12 och 12 är inte lika med 15.
- Läraren: $587 + 468 = 900$, sant eller falskt?
- Elev: Det är falskt.
- Läraren: Hur vet vi det?
- Elev: $500 + 400$ är lika med 900. Men vi har $87 + 68$ också så $587 + 468$ måste vara mer än 900. Alltså måste det vara falskt.
- Läraren: $587 + 468 = 1055$, sant eller falskt?
- Elev: Sant. Jag startade på 900 och räknade ut resten i huvudet. $80 + 60$ är 140. $8 + 7$ är 15 och $900 + 155$ är 1055.

Den här typen av uppgifter där svaret avges direkt till höger om likhetstecknet är eleverna vana vid. När de är förtrogna med att resonera om sanna och falska utsagor kan vi uppmuntra dem att pröva sina uppfattningar om likhetstecknets innebörd ytterligare. Genom att variera formen för sanna och falska utsagor kan vi lyfta fram olika perspektiv på likhet och utmana elevernas uppfattningar av hur likhetstecknet används. Exempelen nedan handlar om addition men utsagor med samma struktur kan förstås användas för samtliga räknesätt.

- a. $3 + 5 = 8$
- b. $8 = 3 + 5$
- c. $8 = 8$
- d. $3 + 5 = 3 + 5$
- e. $3 + 5 = 5 + 3$
- f. $3 + 5 = 4 + 4$

De flesta elever håller förmodligen med om att den första utsagan är sann men några är kanske inte lika säkra på den andra utsagan. Genom att uppmuntra eleverna att engagera sig i en diskussion om hur a och b skiljer sig åt kan vi hjälpa dem att formulera sina uppfattningar, vilka ligger till grund för att avgöra om en utsaga är sann eller falsk. En del elever kan säga att det bara ska finnas ett enda tal till höger om likhetstecknet. I så fall kan utsaga c uppmuntra eleverna att ytterligare diskutera sina antaganden. Om de hävdar att det enbart är till vänster om likhetstecknet som det får finnas två tal kan d , $3 + 5 = 3 + 5$, vara utgångspunkt för att granska detta påstående. Eleverna kan ofta motivera att $3 + 5 = 3 + 5$ är sant med att det är samma tal på båda sidor om likhetstecknet. Utsaga e ger ett något annorlunda perspektiv att tänka om detta påstående. Genom att inkludera noll kan en del

elever acceptera utsagor där fler än ett tal förekommer efter likhetstecknet. Begrunda följande utsagor:

a. $9 + 5 = 14$

b. $9 + 5 = 14 + 0$

c. $9 + 5 = 0 + 14$

d. $9 + 5 = 13 + 1$

De flesta elever kommer att bedöma utsaga *a* som sant. Inledningsvis kan det vara lättare att acceptera utsaga *b* än *d* som sant. I *b* följer svaret på $9 + 5$ direkt efter likhetstecknet och de flesta elever känner till effekten av att lägga till noll. En del elever som inte skulle acceptera utsaga *d* som sann, kan däremot acceptera *b* som sann. Detta öppnar för resonemang om att ha mer än en enda siffra efter likhetstecknet. Utsaga *c* erbjuder ytterligare en utmaning. Svaret visas inte längre direkt efter likhetstecknet, men den enda skillnaden mellan utsaga *b* och *c* är att ordningen mellan talen har ändrats. Troligtvis är eleverna medvetna om att ordningen mellan de tal de adderar inte påverkar svaret. I annat fall bör det bli föremål för diskussion.

En jämförelse mellan utsaga *b* och *c* kan ytterligare tydliggöra vilka regler som ligger till grund för elevernas användning av likhetstecknet. Om de accepterar utsaga *a*, *b* och *c* som sant, har många av anledningarna till varför de inte skulle acceptera utsaga *d* som sant redan eliminerats. Detta kan resultera i en fruktbar diskussion om nödvändigheten att tillämpa reglerna konsekvent.

Öppna utsagor kan varieras för att illustrera samma idé på många sätt. Frågan är "Vilket tal kan du skriva i den tomma rutan för att göra utsagan sann?" Detta sätt att tala om öppna utsagor ger en koppling mellan sanna/falska och öppna utsagor. Följande öppna utsagor svarar mot de tidigare uppgifterna med sanna och falska utsagor.

$3 + 5 = \square$

$8 = 3 + \square$

$8 = \square$

$3 + 5 = \square + 5$

$3 + 5 = \square + 3$

$3 + 5 = \square + 4$

$3 + \square = 8$

$\square = 3 + 5$

Att uppmärksamma

Vi har funnit att eleverna ibland ger olika svar beroende på om de ska bedöma sanna och falska utsagor respektive öppna utsagor. Vissa elever som verkar ha förstått att

likhetstecknet representerar en relation, återgår till att beräkna summan av talen till vänster om likhetstecknet om de i allt för stor utsträckning får arbeta med uppgifter där svaret ges direkt till höger om likhetstecknet. Eleverna behöver kontinuerliga erfarenheter som kan utmana dem att tänka kring likhetstecknet som uttryck för en relation. Frågan är: "Vilket tal kan du skriva i den tomma rutan för att göra utsagan sann?" Det kan finnas många förslag på olika tal men bara ett gör att utsagan faktiskt är sann. Genom detta sätt att resonera kan vi synliggöra en länk mellan sanna/falska respektive öppna utsagor.

Kommunikation och samspel i klassrummet

Genom att välja lämpliga uppgifter kan vi skapa en kontext där elever uppmuntras att granska och pröva sina uppfattningar om likhetstecknets innebörd. Diskussioner om matematiska idéer och hur dessa diskussioner förs, är av kritisk betydelse för all undervisning i matematik. Målet är inte bara att eleverna ska utveckla relevanta föreställningar om användningen av likhetstecknet. Lika viktigt är att engagera dem i konstruktiva matematiska resonemang. Att diskutera alternativa uppfattningar om innebörden av likhetstecknet kan utmana eleverna att undersöka och testa de bevekelsegrunder som motiverar deras påståenden. "Varför tror du att du inte kan skriva utsagor på det sättet?" Att skapa en undervisning som bidrar till att eleverna förstår den accepterade användningen av likhetstecknet är ett första steg i att hjälpa dem att göra generaliseringar om matematik. Vi vill att eleverna ska inse att det förekommer olika uppfattningar i klassen och att alla uppfattningar inte kan vara korrekta. Frågan är ju inte bara att räkna ut vad som är rätt svar på en uppgift, utan att eleverna utvecklar förståelse för vad som kan vara kritiska skillnader mellan olika uppfattningar.

Användning av likhetstecknet – en konvention

I vår strävan att hjälpa elever att utveckla förståelse för att likhetstecknet uttrycker en relation, bör vi komma ihåg att det sätt som vi använder likhetstecknet på grundar sig en överenskommelse eller en konvention. Att vi kan byta ordning mellan de ingående talen i en addition t ex $6 + 5 = 5 + 6$ är inte en konvention. Det är en egenskap hos talen som gör att vi kan hantera dem på ett visst sätt. Men det går inte att bevisa att likhetstecknet representerar en relation, lika lite som det att det är en uppmaning att göra något med de ingående talen. Men genom att uppmuntra eleverna att motivera sina ståndpunkter, t ex varför de anser att ett matematiskt uttryck inte kan skrivas på ett visst sätt, kan vi öppna dörren för nya insikter om vad som bygger på konventioner och vad som är matematiska egenskaper.

Riktmärken (Benchmarks)

Elever går inte nödvändigtvis igenom en sekvens av distinkta faser då de utvecklar sina uppfattningar om likhetstecknet och man bör inte anta att alla elever följer samma utvecklingsgång för att förstå hur likhetstecknet används. Det finns dock några riktmärken, som i tidigare texter benämndes delar av innehållet som är nödvändiga att eleverna ska förstå dvs kritiska aspekter, för undervisningen att ta hänsyn till.

1. Att få elever att uttrycka sig specifikt om vad de tror att likhetstecknet betyder, är ett första steg för att de ska kunna förändra sina uppfattningar. Om eleverna ska kunna jämföra och kontrastera olika uppfattningar, måste de ha klart för sig vad deras egna föreställningar är. De behöver få andra utmaningar än att bara jämföra svar på en

uppgift som $8 + 4 = \square + 5$. Vissa elever kan säga att likhetstecknet måste föregås av två tal som sammanbinds med ett plus eller ett minus och sedan följas av svaret (vilket resulterar i 12 i uppgiften ovan). Andra kan säga att man måste använda alla ingående tal (vilket resulterar i svaret 17). Även om ingen av dessa uppfattningar är korrekta så är det ett framsteg att de blir tydligt formulerade både för läraren och för eleverna själva. Det ger en god grund för fortsatta utmaningar.

2. Det andra riktmärket handlar om att eleven accepterar några matematiska uttryck som sanna, som inte har formen $a + b = c$. Det kan vara $8 = 5 + 3$, $8 = 8$, $3 + 5 = 8 + 0$ eller $3 + 5 = 3 + 5$.
3. Det tredje riktmärket innebär att eleven uppfattar att likhetstecknet betecknar en relation mellan två ekvivalenta tal. I den här fasen jämför eleverna talen till vänster och höger om likhetstecknet genom att beräkna båda sidorna.
4. Det fjärde riktmärket uppnås när eleverna kan jämföra de matematiska uttrycken utan att utföra beräkningar.

Dessa riktmärken är en guide. Alla elever i en viss klass kommer inte att uppnå dessa samtidigt och alla elever kommer inte heller att följa denna utvecklingsgång exakt. Vissa elever använder ett relationellt tänkande som kännetecknar riktmärke 4 redan i den inledande undervisningen om att likhetstecknet representerar en relation mellan tal. I de tidiga årskurserna kommer variationen av uppfattningar vara stor under tiden som eleverna strävar efter att utveckla djup förståelse för användningen av likhetstecknet.

Exempel på frågor för lärare att reflektera över

1. Vilka olika svar kan elever ge till följande uppgift?

$$9 + 7 = \square + 8$$

2. Varför bad läraren elev E att lösa uppgiften $57 + 86 = \square + 84$ efter att eleven hade löst en uppgift med mindre tal? Finns det några andra frågor som du skulle ha ställt till elev E eller någon annan elev som är beskriven i texten ovan, för att bättre förstå deras uppfattningar om betydelsen av likhetstecknet och relationen mellan numeriska uttryck?
3. Finns det specifika faktorer i undervisningen/lektionerna som verkar ha särskilda effekter när det gäller att förändra/utveckla elevernas uppfattningar om betydelsen av likhetstecknet?