Aritmetiska talföljder

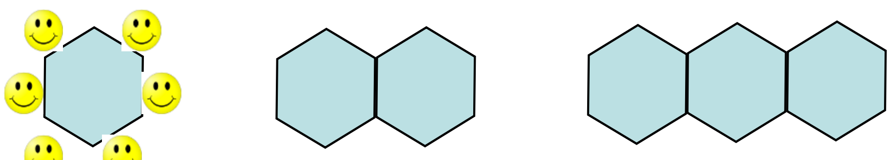
Cecilia Kilhamn, Göteborgs Universitet och Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet

Mönster är en viktig del av algebran. Genom aktiviteter där eleverna får upptäcka, konstruera och beskriva mönster utvecklas deras förmåga att se likheter och skillnader, förändring, ordning och struktur. Målet är också att eleverna ska utveckla sin förmåga att uttrycka en generalisering.

Det här innehållet handlar om aritmetiska talföljder, det vill säga talföljder med en konstant skillnad mellan talen. I matematiken är det alltid en fördel att arbeta med olika representationer. Om man utgår från ett mönster som kan *illustreras geometriskt* får man en *bild*. I en *tabell* översätts bilden till en *talföljd* och eleven kan sedan ta hjälp av bilden, och eventuellt *konkret material*, samt talen i tabellen för att se strukturen i mönstret. Ett exempel på en rik mönsteruppgift är *långbordet*:

Långbordet – borden är hexagon formade

Vi gör ett långbord av hexagonformade bord så som bilderna visar.
På varje fri sida kan det sitta en person. Hur många personer får plats vid långbordet?



1 hexagon **2 hexagoner** **3 hexagoner**

Frågan som ställs till det här mönstret är vad det finns för samband mellan antalet bord och antalet platser. Tabellen genererar två talföljder och ett samband mellan dem. Detta samband kan också ses som en funktion där antal platser är en funktion av antal bord, eller som en funktion där talen i talföljden 6, 10, 14… är en funktion av ordningen som dessa tal kommer i följden. Det finns alltså ett gemensamt samband mellan talparen [1, 6], [2, 10] och [3, 14]. Kan man hitta ett generellt uttryck för detta samband innebär det att man kan beräkna det *n*:te talet i ordningen. I uppgiften betyder det att man vet precis hur många platser det blir med ett visst antal bord.

Antal bord	Antal platser
1	6
2	10
3	14
4	
5	
10	
100	
n	

I boken *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* beskriver Lee hur elevers svårigheter med mönsteruppgifter finns på tre olika nivåer.

- perceptiv nivå: att **uppfatta** mönstret
- verbal nivå: att **kunna beskriva** mönstret
- symboliserande nivå: att kunna beskriva mönstret **generellt** och beskriva sambandet (den *n*:te figuren) med **symbolspråk**.

För att se strukturen i talföljden behöver eleverna upptäcka både **talen** i talföljden, **skillnaden mellan** talen i talföljden och **sambandet** mellan talparen som utgörs av ett tal och dess ordning i talföljden. Luis Radford (2012) har noga studerat hur elever gör när de upptäcker och försöker förstå ett mönster och han visar hur eleverna utnyttjar hela kroppen med gester, mimik, ord och ritningar. Det blir alltså lättare för elever att uppfatta ett mönster om man tar vara på och uppmärksammar hela deras repertoar av uttryckssätt.

Tändsticksmönster

I ett pågående forskningsprojekt (Kilhamn & Röj-Lindberg, 2013) videofilmas lektioner om inledande algebra i årskurs 6 och 7 i fyra olika länder. I det materialet finns bland annat en lektion då en klass arbetar med tändsticksmönster hämtade från Nämnaren 2001. På lektionen arbetar eleverna med konkret material och lägger figurerna i tur och ordning. Efter en stund följer läraren upp på tavlan och resonerar med eleverna om hur många stickor som skulle behövas för att göra större figurer. Till ett av mönstren får de fram en tabell som ser ut så här:

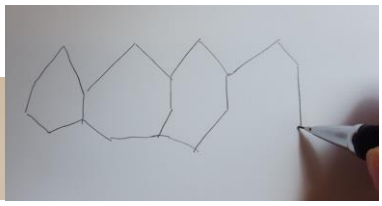
Figur nr	Stickor
1	4
2	8
3	12
5	20
10	40
20	

Eftersom det här är en enkel proportionalitet tror man kanske att eleverna snabbt skulle inse att det går 4 stickor till varje figur, så de ska multiplicera figurens nummer med 4, men det gör inte alla elever. Istället börjar eleverna leta andra samband mellan talen i tabellen och för den sista tomma rutan kommer två olika förslag. En elev föreslår 80 för att ”5 var 20 och då ska 10 som är dubbelt 5 vara dubbelt 20, alltså 40”. En annan elev föreslår 60 för att ”man lägger ju på 20 från 20 till 40 så då får man lägga på 20 från 40 till 60”. Även om det första resonemanget ger rätt svar är inget av förslagen framgångsrikt för att komma fram till ett generellt sätt att beskriva hur många stickor man behöver för den *n*:te figuren.

Ingen av eleverna skulle enkelt kunna svara på hur många stickor som skulle behövas för figur nummer 93. Båda de här eleverna skulle behöva få syn på dels hur många som adderas varje gång (+4), dels att det finns ett gemensamt samband mellan figurens nummer och antalet stickor (multiplicera med 4).

Tänkbara kritiska aspekter

Att se vilket mönster det handlar om (perceptiv nivå). Att detta inte är uppenbart visas av de två bilderna nedan. Bilderna är avritade och föreställer två elevers försök att rita upp hexagonlångbordet som beskrevs överst i den här texten. Om man inte urskiljer sexhörningarnas form och orientering bildas ett annat mönster.

Den här delen av innehållet är enklast att belysa genom att visa skillnaden mellan olika sätt att rita hexagonlångbordet för att belysa vad som utgör det aktuella mönstret. Hur ligger hexagonerna och hur lägger vi dit nästa?

Att se talen i talföljden, det vill säga att kunna se hur mönstret i bilden kan överföras till en talföljd och/eller föras in i en tabell. *Vad* är det som ska räknas? *Hur* kan man räkna det? *Vad* ska stå i tabellen? Beroende på hur tabellen konstrueras skapas olika möjligheter att se talföljden.

Verbalt	**Med tal**	**Algebraiskt**
4 platser på varje bord plus 1 på varje kant	1 + 4+4+…+4+4 + 1 n stycken fyror	$4n + 2$
5 platser på första och sista bordet och 4 platser på borden emellan	5 + 4+4+…+4+4 + 5 (n-2) stycken fyror	$4 \cdot (n - 2) + 10$ $4(n-2) + 10$
2 platser på varje bord i överkant, 2 på varje i underkant och 1 på varje kant	2· (2+2+…+2+2)+ 1+1 n stycken tvåor i parentesen	$2 \cdot (2 \cdot n) + 2$ $2(2n) + 2$
6 platser på varje bord minus 2 på alla skarvar. Antalet skarvar är1färre än antal	(6+6+…+6+6) – (2+2+…+2+2) n stycken sexor men (n-1)	$6 \cdot n - 2 \cdot (n - 1)$ $6n - 2(n - 1)$

bord	stycken tvåor	

Att se skillnaden mellan talen i talföljden, det vill säga att se att skillnaden mellan alla på varandra följande tal i följden följer samma regelbundenhet. I ett aritmetiskt mönster är det alltid en konstant skillnad.

Att se sambandet mellan ett tal i talföljden och dess position i talföljden, det vill säga se talparen som bildas horisontellt i tabellen.

Att finna ett sätt att verbalt uttrycka en generell regel (verbal nivå), och inse att det kan finnas *flera olika sätt* att uttrycka samma sak. Regeln kan många gånger uttryckas på olika sätt beroende på hur man ser mönstret. När man så småningom beskriver mönstret med ett *algebraiskt utryck* kommer olika sätt att se mönstret att generera olika men ekvivalenta (likvärdiga) uttryck. Tabellen visar exempel på hur hexagonlångbordet ovan skulle kunna beskrivas på olika sätt.

Referenser

Ahlström, R. (2001) *Uppslaget Mönster med Stickor*. Nämnaren nr 1, 2001 http://ncm.gu.se/media/stravor/4/e/3235_01_1.pdf

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (Vol. 18). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lewis, C., & Hurd, J. (2011). *Lesson Study step by step – How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kilhamn, C.,& Röj-Lindberg, A.-S. (2013). Seeking hidden dimensions of algebra teaching through video analysis. In B. Grevholm (Ed.), *Nordic research in mathematics education, past, present and future*. Oslo: Cappelen Damm.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.